P 6

Éléments de statique des fluides

6.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	• Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $\dfrac{dp}{dz} = -\rho\, g$.	• Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. • Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère modélisés.

6.2 Système et sous-système

6.2.1 Notion de fluide

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés d'un fluide au repos dans un référentiel galiléen en tenant compte du champ de pesanteur.

— Fluide —

Un fluide est un milieu continu, déformable qui peut s'écouler.

C'est un ensemble d'entités microscopiques (atomes, molécules, ...) occupant un volume dont la forme géométrique s'adapte aux parois du récipient.

Outre le fait qu'un fluide est déformable, il est également sans rigidité : il peut s'écouler et épouser la forme du récipient qui le contient.

On considère dans cette définition les liquides et les gaz.

Les liquides possèdent un volume propre : ils sont peu compressibles et les actions à courte distance (les forces de Van Der Waals) interviennent de façon importante dans les propriétés des liquides.

Les gaz occupent tout le volume qui leur sont offert et ils sont compressibles.

Comme nous venons de le voir, les liquides peuvent être, avec une bonne précision, considérés comme incompressibles, à l'inverse des gaz.
Cependant, la masse volumique des gaz peut dans certains cas être considérée comme uniforme et dans ce cas, ces gaz pourront être assimilés à des fluides incompressibles : cf. page 174.

6.2.2 Différentes échelles d'étude

⇒ **Activité 6. 1**

1. Calculer le nombre de molécules d'eau liquide dans un volume $V_0 = 1\,mm^3$.
2. Même question pour l'air.

Données :

Masse molaire de l'eau : $M = 18\,g.mol^{-1}$,
Masse volumique de l'eau : $\rho = 1{,}00\,kg.L^{-1}$,
Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02.10^{23}\,mol^{-1}$,
Volume molaire de l'air à $25^o\,C$: $V_m = 25\,L.mol^{-1}$.

Un fluide peut être décrit à plusieurs échelles : à l'échelle microscopique, il est constitué d'atomes en interaction. Cette première modélisation, bien qu'exacte, est beaucoup trop complexe pour être réellement utile. Un second point de vue consiste à utiliser la physique statistique et la thermodynamique qui permettent de décrire à grande échelle toutes les propriétés macroscopiques du système à l'aide d'un nombre restreint de grandeurs physiques (entropie, pression, ...), dites *grandeurs d'état*. Dans le cas général, celles-ci ne sont pas homogènes à l'échelle de tout le système.

On définit donc une échelle intermédiaire, dite *échelle mésoscopique* : cette échelle est suffisamment grande pour qu'on puisse y appliquer les lois de la thermodynamique tout en étant suffisamment petite pour que l'on puisse considérer les grandeurs d'états comme étant constantes.

On découpe alors le fluide en cellules de taille mésoscopique de volume $d^3V_{(M)}$, que l'on appelle *particules fluides* : leur volume est suffisamment petit pour qu'on puisse les considérer comme ponctuelles à l'échelle du système, mais elles sont suffisamment grandes pour que l'on puisse les considérer comme des milieux continus. Autrement dit, on choisit $d^3V_{(M)}$ de façon à avoir $a^3 \ll d^3V_{(M)} \ll V$, où V désigne le volume total du système total et a est la distance inter-atomique.

En résumé, on découpe le fluide en éléments de volume $d^3V_{(M)}$ petits à l'échelle macroscopique et suffisamment grands à l'échelle microscopique pour pouvoir définir des grandeurs moyennées sur $d^3V_{(M)}$.

6.2.3 Fluide continu

Dans le modèle du fluide continu :

- on n'étudie pas individuellement chaque particule de fluide,
- les grandeurs physiques définies dans le fluide sont des moyennes sur des éléments de volume $d^3V_{(M)}$ mésoscopiques (de taille de l'ordre de $1\ \mu m$), c'est-à-dire :
  - petits devant les dimensions macroscopiques,
  - grands devant les dimensions microscopiques.

> L'approximation des milieux continus consiste alors à définir des champs macroscopiques en faisant des moyennes sur les éléments de volume $d^3V_{(M)}$.

6.3 Pression et force pressante

Le choc des molécules sur les parois fixes d'un récipient se traduisent, à l'échelle macroscopique, par une force $\overrightarrow{F_p}$ liée à la variation de la quantité de mouvement des molécules ayant frappé la paroi pendant une durée déterminée.

Pour un élément de paroi d^2S, le nombre de chocs est proportionnel à d^2S. Par symétrie, cette force est normale à l'élément de paroi.

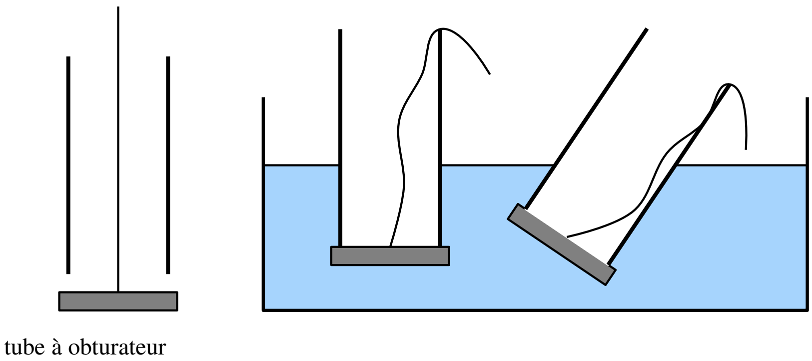


FIGURE 6.1 – Force pressante à l'intérieur d'un liquide

Le fait que l'obturateur reste appliqué contre le tube cylindrique, quelle que soit l'orientation de celui-ci, montre que le liquide exerce sur lui une force pressante constamment dirigée du liquide vers le tube.

— Pression —

On appelle pression $p_{(M)}$ exercée par le fluide en M, la grandeur scalaire définie par :

$$d^2\overrightarrow{F_p} = p_{(M)}\, d^2S_{(M)}\,\overrightarrow{n}$$

$d^2\overrightarrow{F_p}$ est appelée force pressante élémentaire.

Les unités :
Une force s'exprime en $kg.m.s^{-2}$, une pression en Pa.
Systèmes d'unités :

- $1\, bar = 10^5\ Pa$,
- $1\, atm = 1{,}013\, bar = 1{,}013.10^5\ Pa$,
- $1\, atm = 760\, mm\, Hg = 76{,}0\, cm\, Hg$,
- $1\, tor$ (De Torricelli) = pression exercée par $1\, mm\, de\, Hg$ (mercure),
- $1\, N = 1\, kg.m.s^{-2}$.

Quelques ordres de grandeur :

étoile à neutrons [1]	$10^{27}\ bar$
centre de la terre	$10^6\ bar$
haute pression en laboratoire	$10^5\ bar$
fond des fosses océaniques	$10^3\ bar$
talons aiguilles	$10^2\ bar$
surface de la terre	$1\ bar$
trompe à eau	$10^{-2}\ bar$
ultra-vide en laboratoire	$10^{-17}\ bar$
vide interstellaire	$10^{-22}\ bar$

TABLE 6.2 – Pressions

Pour mesurer une pression, on peut se servir d'une *capsule manométrique*, raccordée à un *manomètre en U* :

1. Une étoile à neutrons est un astre principalement composé de neutrons maintenus ensemble par les forces de gravitation. De tels objets sont le résidu compact issu de l'effondrement gravitationnel du cœur d'une étoile massive quand celle-ci a épuisé son combustible nucléaire, d'où leur nom. Cet effondrement s'accompagne d'une explosion des couches externes de l'étoile, qui sont complètement disloquées et rendues au milieu interstellaire, phénomène appelé supernova. Le résidu compact n'a d'étoile que le nom : il n'est plus le siège de réactions nucléaires et sa structure est radicalement différente de celle d'une étoile ordinaire. Sa masse volumique est en effet extraordinairement élevée, de l'ordre de 10^{15} grammes (soit un milliard de tonnes) par centimètre cube, et sa masse comprise dans une fourchette très étroite, entre 1,4 et 3,2 fois la masse du Soleil. Cette masse occupe un volume très restreint, d'un rayon d'environ 10 à 20 kilomètres seulement.

À leur naissance, les étoiles à neutrons sont dotées d'une vitesse de rotation très élevée, de plusieurs dizaines de tours par seconde. Elles possèdent également un champ magnétique très intense, allant jusqu'à 10^{11} teslas. (source wikipedia)

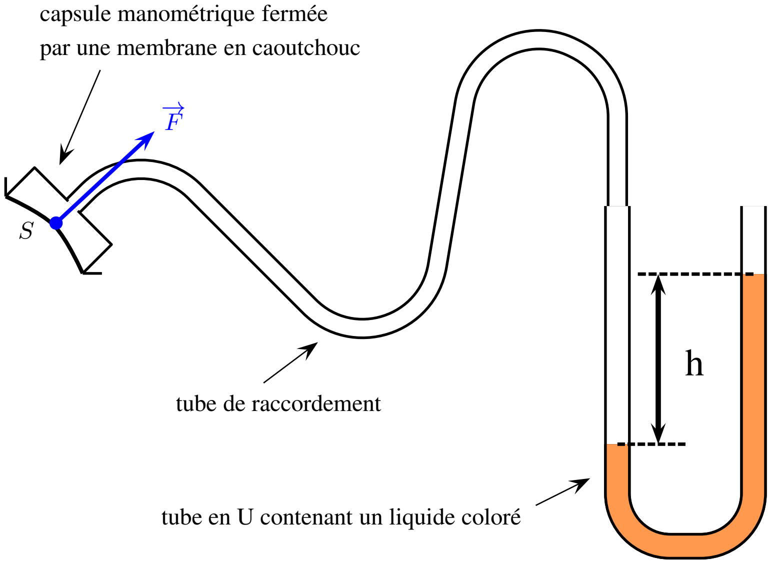


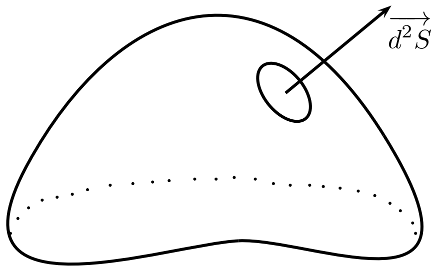
FIGURE 6.2 – Capsule manométrique et manomètre en U

6.4 Force résultante exercée par un fluide

Considérons un solide immergé dans un fluide. La force pressante résultante $\overrightarrow{F_p}$ exercée par un fluide sur ce solide de surface Σ, est la somme des forces $d^2\overrightarrow{F_p}$:

$$\overrightarrow{F_p} = \iint_{\Sigma} d^2\,\overrightarrow{F_p} = -\iint_{\Sigma} p_{(M)}\,d^2S_{(M)}\,\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$$

avec $\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$ vecteur unitaire, orienté vers l'extérieur, normal à la surface élémentaire $d^2S_{(M)}$.



On peut également poser $\overrightarrow{d^2S}_{(M)} = d^2S_{(M)}\,\overrightarrow{n_{\text{ext}}} = d^2S_{(M)}\,\overrightarrow{n}$.
En coordonnées cartésiennes, on pourra effectuer par exemple le découpage suivant : $d^2S = dx\,dy$.
En coordonnées polaires, on pourra effectuer par exemple le découpage suivant : $d^2S = dr\,r\,d\theta = r\,dr\,d\theta$.

6.5 Principe fondamental de la statique des fluides

Considérons un fluide quelconque. Soit M un point quelconque dans le fluide. Soit $\rho_{(M)}$ la masse volumique dans le fluide, au voisinage de M, $d^3m_{(M)}$ la masse d'un volume élémentaire $d^3V_{(M)}$ au voisinage de M. On a :

$$d^3m_{(M)} = \rho_{(M)}\,d^3V_{(M)}$$

Parmi les actions extérieures subies par une partie quelconque d'un fluide, il faut distinguer :

- **les forces volumiques** : la force $d\overrightarrow{F_v}$ subie par une particule de fluide est proportionnelle à $dV_{(M)}$. Cela permet de définir une densité volumique de force :

$$\overrightarrow{f_v} = \frac{d\overrightarrow{F_v}}{dV_{(M)}}$$

Ainsi, pour le champ de pesanteur, on obtient :

$$d\overrightarrow{F_v} = \overrightarrow{g}\, dm = \rho_{(M)}\, \overrightarrow{g}\, dV_{(M)}$$

- **les forces surfaciques** : la force $d\overrightarrow{F}_s$ subie par une particule de fluide est proportionnelle à dS. Cela permet de définir une densité surfacique de force :

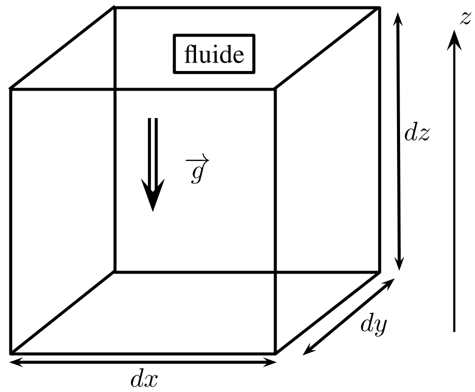
$$\overrightarrow{f_s} = \frac{d\overrightarrow{F_s}}{dS}$$

Ainsi, pour les forces de pression, on obtient :

$$d\overrightarrow{F_p} = -p\,(M)\, dS\, \overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_{\text{ext}}}$ est un vecteur unitaire sortant.

Soit une particule de fluide de volume $dV_{(M)}$ en équilibre, découpé en coordonnées cartésiennes ($dV_{(M)} = dx\, dy\, dz$), soumise au champ de pesanteur et aux forces de pression. On a alors à l'équilibre la relation :



$$d\overrightarrow{F_p} + d\overrightarrow{F_v} = \overrightarrow{0}$$

$$d\overrightarrow{F_p} = -d\overrightarrow{F_v} = -\rho\, \overrightarrow{g}\, dV_{(M)}$$

Avec un axe z vertical ascendant, on a $\overrightarrow{g} = -g\ \overrightarrow{e_z}$ et :

$$d\overrightarrow{F_p} = \begin{vmatrix} -p\,(x)\, dy\, dz\,(-\overrightarrow{e_x}) - p\,(x+dx)\, dy\, dz\,(+\overrightarrow{e_x}) \\ -p\,(y)\, dx\, dz\,(-\overrightarrow{e_y}) - p\,(y+dy)\, dx\, dz\,(+\overrightarrow{e_y}) \\ -p\,(z)\, dx\, dy\,(-\overrightarrow{e_z}) - p\,(z+dz)\, dx\, dy\,(+\overrightarrow{e_z}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\left(p\,(x+dx) - p\,(x)\right)\, dy\, dz\ \overrightarrow{e_x} \\ -\left(p\,(y+dy) - p\,(y)\right)\, dx\, dz\ \overrightarrow{e_y} \\ -\left(p\,(z+dz) - p\,(z)\right)\, dx\, dy\ \overrightarrow{e_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\ \overrightarrow{e_x} \\ 0\ \overrightarrow{e_y} \\ \rho\, g\, dV_{(M)}\ \overrightarrow{e_z} \end{vmatrix}$$

En projetant sur les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, on obtient 3 équations :

$$\begin{cases} -\left(p\,(x+dx) - p\,(x)\right)\, dy\, dz = 0 \\ -\left(p\,(y+dy) - p\,(y)\right)\, dx\, dz = 0 \\ -\left(p\,(z+dz) - p\,(z)\right)\, dx\, dy = \rho\, g\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

La première équation indique que $p\,(x+dx) = p\,(x)$, donc que la pression est indépendante de la variable d'espace x.
Même raisonnement pour $p\,(y)$ avec la deuxième équation : la pression est donc également indépendante de la variable y.

— Remarque —

Les 2 résultats précédents pouvaient être obtenus directement en remarquant que les forces de pression sur les surfaces latérales s'annulaient 2 à 2.

La troisième équation permet d'écrire :

$$p\,(z+dz) - p\,(z) = -\rho\, g\, dz$$

On peut alors poser :

$$p\,(z+dz) = p\,(z) + dp$$

On en déduit :

— Principe fondamental de l'hydrostatique —

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho\, g}$$

Les unités :
ρ s'exprime en $kg.m^{-3}$, g en $m.s^{-2}$, p en Pa et z en m.

C'est sous cette forme que nous retiendrons ce principe fondamental de la statique des fluides.

⚠ Si l'axe z est vertical descendant, on a alors :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = +\rho\, g}$$

6.6 Théorème de Pascal

— Fluide incompressible —

Un fluide est dit incompressible si :

$$\rho_{(M)} = C^{te} = \rho_0$$

Considérons un fluide incompressible.
Par application de la relation fondamentale de la statique des fluides, on obtient :

$$dp_{(M)} = -\rho_{(M)}\, g\, dz = -\rho_0\, g\, dz$$

En intégrant entre $z = 0$ ($p = p_0$) et $z_{(M)}$ ($p = p_{(M)}$), on obtient la relation de Pascal :

$$p_{(M)} = p_0 - \rho_0\, g\, z_{(M)}$$
avec ici, z **axe vertical ascendant**.

⚠ Si z' **est un axe vertical descendant**, on a :

$$p_{(M)} = p_0 + \rho_0\, g\, z'_{(M)}$$

— Théorème de Pascal —

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos se transmet intégralement à tous les autres points du liquide.

Un fluide incompressible transmet donc intégralement les variations de pression.
Conséquences :

- Principe des vases communicants : la surface libre d'un fluide est contenue dans un plan horizontal.
- L'interface entre deux fluides de densités différentes est contenue dans un plan horizontal.
- Les isobares sont perpendiculaires à l'accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g}$.

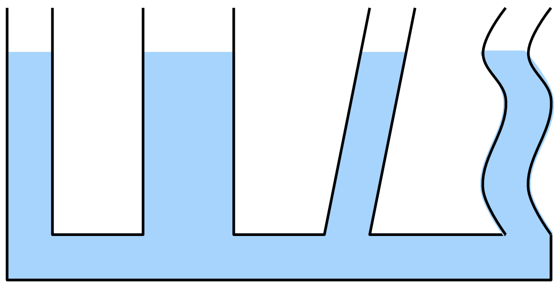


FIGURE 6.3 – Vases communicants

— Remarque —

On introduit parfois la grandeur :

$$p^* = p + \rho\, g\, z$$

appelée *pression statique*.
L'intérêt d'introduire cette grandeur, c'est que dans un fluide incompressible, celle-ci est constante.

6.7 Champ de pression dans un gaz parfait : atmosphère isotherme

Avec pour l'air, $M = 29{,}0\, g.mol^{-1}$, $R = 8{,}314\, J.K^{-1}.mol^{-1}$, $T = 273\, K$, $g = 9{,}81\, m.s^{-2}$ et $p_0 = 1{,}00\, bar$ on trouve pour $z = 100\, m$, une pression $p = 0{,}988\, bar$

⇒ **Activité 6. 2**
Calculer la variation relative de pression $\dfrac{\Delta p}{p_0}$ entre les altitudes 0 et $100\, m$.

L'atmosphère terrestre s'étend sur plusieurs dizaines de kilomètres et apparaît donc en revanche comme un système suffisamment étendu pour que l'influence de la pesanteur s'y fasse sentir.
Néanmoins, le modèle de l'atmosphère isotherme ne s'applique qu'à la haute atmosphère, pour des couches d'air dont l'altitude est comprise entre 11 et $30\, km$ avec une température de l'ordre de $223\, K$. En effet, l'uniformité de la température suppose un brassage suffisant des couches atmosphériques ce qui n'est pas le cas à basse altitude où le modèle du gradient de température est mieux adapté.
Considérons un gaz parfait **isotherme** de température T_0.

La loi des gaz parfaits s'écrit :

$$p\, V = n\, R\, T = \frac{m}{M}\, R\, T_0$$

> **Les unités :**
> p en Pa, V en m^3, n en mol, $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$, T en K

Sa masse volumique est alors :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M\,p}{R\,T_0}$$

En considérant un axe z **vertical ascendant**, la loi fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\,g = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,p$$

Soit, en séparant les variables :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,dz$$

puis en intégrant :

$$[\ln p]_{p\,(0)}^{p\,(z)} = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,[z]_0^z$$

On a alors :

$$\ln\frac{p\,(z)}{p\,(0)} = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z$$

On obtient alors :

$$p\,(z) = p_0\,e^{-\dfrac{M\,g\,z}{R\,T_0}}$$

En posant $H = \dfrac{R\,T}{M\,g}$, on peut aussi exprimer la pression sous la forme suivante :

$$p\,(z) = p_0\,e^{-\dfrac{z}{H}}$$

H est appelée échelle de hauteur du gaz.

6.8 Champ de pression dans un liquide : la mer

La masse volumique ρ_m de l'eau de mer est environ égale à $1{,}025\ kg.L^{-1}$, donc un peu plus grande que l'eau douce.

Si on descend dans l'eau de mer d'une profondeur Δz, la pression varie de $\Delta p = \rho_m\,g\,\Delta z$.

Ainsi, pour une variation de profondeur de $10\,m$, la pression varie d'environ $10^3 \times 10 \times 10 = 10^5\ Pa$, soit $1\,bar$.

La pression augmente ainsi sous l'eau de $1\,bar$ tous les $10\,m$.

La pression à la surface de la mer étant d'environ égale à $1\,bar$, elle vaut par exemple $11\,bar$ à $100\,m$.

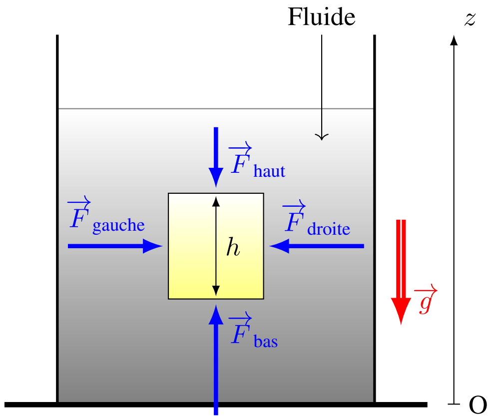
> **— Remarques —**
>
> - Le calcul exact en prenant $g = 9{,}81\,m.s^{-2}$ et $\rho_m = 1{,}025\,kg.L^{-1}$ modifie très peu le résultat précédent.
> - La masse volumique de l'eau de mer varie en fonction de sa salinité. Cette dernière varie à la surface du globe et en un endroit donné, elle varie en fonction de la profondeur.
> - L'accélération de la pesanteur g varie également en fonction de la profondeur …

6.9 Force pressante et poussée d'Archimède

Imaginons un solide parallélépipédique de base S et de hauteur h immergé dans un liquide de masse volumique ρ_{fluide} au repos et calculons la résultante des forces de pression $\overrightarrow{\Pi}$.
La pression ne dépend que de la profondeur et avec un axe vertical ascendant et l'origine en bas du récipient, on a :

$$p\,(z) = p\,(z=0) - \rho_{\text{fluide}}\, g\, z$$

Par symétrie, les forces de pression horizontales se compensent, contrairement aux forces verticales du fait de la variation de pression avec la profondeur.



La résultante des forces de pression n'a donc qu'une composante suivant z :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Pi} &= \overrightarrow{F}_{\text{bas}} + \overrightarrow{F}_{\text{haut}} \\
&= p\,(z)\, S\ \overrightarrow{e_z} - p\,(z+h)\, S\ \overrightarrow{e_z} \\
&= [p\,(z) - p\,(z+h)]\ S\ \overrightarrow{e_z} \\
&= [-\rho_{\text{fluide}}\, g\, z + \rho_{\text{fluide}}\, g\,(z+h)]\ S\ \overrightarrow{e_z} \\
&= \rho_{\text{fluide}}\, g\, h\, S\ \overrightarrow{e_z} \\
&= \rho_{\text{fluide}}\, g\, V_d\ \overrightarrow{e_z} \\
&= m_d\, g\ \overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

où $m_d = \rho_{\text{fluide}}\, V_d$ désigne la masse de liquide déplacé.

On obtient donc une force ascendante égale au poids du volume de liquide déplacé.

— Théorème d'Archimède (250 avant J.C.) —

Tous corps immergé dans un ou plusieurs fluides subit une force pressante résultante opposée au poids et égale en module au poids du fluide déplacé.
Cette force est notée $\overrightarrow{\Pi}$ et est appelée poussée d'Archimède. Elle est appliquée au centre d'inertie du fluide déplacé, point appelé centre de poussée. On le note souvent C.

— Poussée d'Archimède —

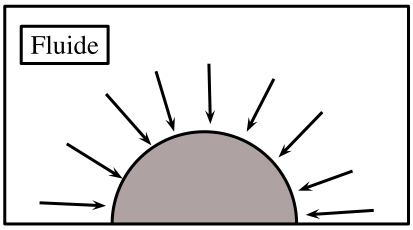
On appelle poussée d'Archimède la force définie par :

$$\overrightarrow{\Pi} = -\iiint_{V_{\text{immergé}}} \rho_{\text{fluide}}\ \overrightarrow{g}\ d^3V_{(M)}$$

Les unités :
La poussée d'Archimède est une force et s'exprime donc en newtons N.

Le centre de poussée et le centre d'inertie sont en principe différents : le centre de poussée (centre d'inertie du fluide) est C alors que le centre d'inertie du solide est G.

⚠ Validité du théorème :
Le théorème d'Archimède n'est valable que si le fluide entoure complètement le solide. Ainsi, sur le schéma ci-contre, on observe que le solide est plaqué au fond du récipient : le théorème ne s'applique donc pas.



6.10 Approfondissements : hors programme

6.10.1 Atmosphère à température variable

Le modèle de l'atmosphère isotherme n'étant pas très réaliste, on peut admettre que jusqu'à une altitude de l'ordre de 10 km, la température vérifie la loi $T(z) = T_0\,(1 - a\,z)$. C'est ce qu'on appelle un **gradient de température**.

La relation $\dfrac{dp}{dz} = -\rho\,g$ avec $\rho = \dfrac{M\,p}{R\,T}$ donne :

$$dp = -\frac{p\,M\,g}{R\,T}\,dz = -\frac{p\,M\,g\,dz}{R\,T_0\,(1 - a\,z)}$$

En posant $\beta = \dfrac{M\,g}{a\,R\,T_0}$, et en séparant les variables, on obtient :

$$\frac{dp}{p} = -\beta\,a\,\frac{dz}{1 - a\,z}$$

Soit, en intégrant :

$$[\ln p\,(z)]_{p_0}^{p\,(z)} = \beta\,\left[\ln\,(1 - a\,z)\right]_{z=0}^{z}$$

D'où l'expression de la pression p :

$$p\,(z) = p_0\,\left(1 - a\,z\right)^{\beta}$$

6.10.2 Atmosphère isentropique

Un autre modèle est encore possible, c'est celui de l'atmosphère isentropique (avec $p\,V^{\gamma} = C^{te}$).

La relation $\dfrac{dp}{dz} = -\rho\,g$ avec $\rho = \dfrac{M\,p}{R\,T}$ donne encore :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\,M\,g}{R\,T}\,dz$$

La loi de Laplace peut s'écrire :

$$p^{1-\gamma}\,T^{\gamma} = p_0^{1-\gamma}\,T_0^{\gamma}$$

Soit :

$$T\,(z) = T_0\,\left(\frac{p_0}{p\,(z)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

On obtient alors :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\,(z)\,M\,g}{R\,T_0}\,\left(\frac{p\,(z)}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\,dz = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,\left(\frac{p\,(z)^{\frac{1}{\gamma}}}{p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}\right)\,dz$$

En séparant les variables, il vient :

$$p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\ p\left(z\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\,dp = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,dz$$

En intégrant z de 0 à z et $p\left(z\right)$ de $p_0 p\left(z\right)$, on obtient :

$$p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\ \frac{1}{-\dfrac{1}{\gamma}+1}\left[p\left(z\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1}\right]_{p_0}^{p\left(z\right)} = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z$$

Soit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\ \left[p\left(z\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = -\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z$$

ou encore :

$$\left(\frac{p\left(z\right)}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z$$

En isolant $p\left(z\right)$, on a alors :

$$p\left(z\right) = p_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

— Remarques —

- On peut également utiliser la masse volumique pour trouver la relation :

$$p\left(z\right) = p_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M\,g}{R\,T_0}\,z\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

- De plus, la loi de Laplace :

$$T\left(z\right) = T_0\left(\frac{p_0}{p(z)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

donne :

$$T\left(z\right) = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M\,g}{R}\,z$$